TENZORSKA ANALIZA

METRIČKI PROSTORI – RIEMANN-OV PROSTOR

Ukoliko je u N-dim. prostoru definisano rastojanje između tačaka (metrika) onda takav prostor nazivamo METRIČKI PROSTOR

Ako imamo dve tačke $(x^1, \dots, x^N)$ i $(x^1+dx^1, \dots, x^N+dx^N)$

Prema analogiji sa E_3 rastojanje definišemo ovako:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \qquad (\text{sumiranje po } i \text{ i } j)$$

Zahtev koji mora da ispunjava (skalar) ds^2 je taj da ostaje invarijantan pri transformaciji koordinata.

Generalno govoreći:

- g_{ij} mogu biti f-je položaja
- ds^2 – ne mora nužno biti pozitivno definitna

ds^2 – skalar $dx^i dx^j$ – dvaput kontravarijantni tenzor

prema zakonu količnika $\Rightarrow$ g_{ij} $\rightarrow$ dvaput kovarijantni ~~tenzor~~

To se može pokazati i ovako:

$$\bar{g}_{ij}\, d\bar{x}^i d\bar{x}^j = g_{em}\, \underbrace{dx^e dx^m} = g_{em} \frac{\partial x^e}{\partial \bar{x}^i} d\bar{x}^i \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j$$

$$\Rightarrow \quad \bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^e}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} g_{em}$$

Tenzor g_{ij} je simetričan i možemo ga predstaviti šemom:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & & & \\ & & & \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{NN} \end{pmatrix}$$

g_{ij} – naziva se metrički ili fundamentalni tenzor

Ukoliko se metrika može napisati u obliku:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots (dx^N)^2$$

kažemo da imamo Euklidov prostor ili za taj prostor $g_{ij} = \delta_{ij}$

Primer: u

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

Ako se radi o sferi poluprečnika R onda

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \qquad (x^1 = \theta, \; x^2 = \varphi)$$

$$\Rightarrow \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(2) tzv. prostor Minkovskog

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2$$

Taj prostor je neeuklidski Riemann-ov prostor.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Transformacijom $\overline{x}^p = x^p \quad (p = 1,2,3) \qquad \overline{x}^4 = i x^4$

metrika postaje euklidska ali koordinate postaju kompleksne.

Neka je $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ \vdots & & & \\ g_{N1} & & & \end{vmatrix}$ determinanta

i neka je $G(i,j)$ – kofaktor elementa i-te vrste j-kol.

Ako determ. g razvijemo po i-toj vrsti

$$g = g_{i1} G(i,1) + g_{i2} G(i,2) + \dots + g_{in} G(i,n)$$

ako umesto elemenata i-te vrste stavimo elemente j-te vrste dobija se vrednost $\emptyset$. [lako se proverava]*

$$0 = g_{j1} G(i,1) + g_{j2} G(i,2) + \quad g_{jn} G(i,n)$$

Dakle $\quad g_{kj} G(i,j) = g\, \delta_k^i \quad$ sumiranje po j

Napišimo to u obliku

$$g_{kj}\, g^{ij} = \delta_k^i$$

Gde je uvedena oznaka $g^{ij} = \dfrac{G(i,j)}{g}$

g^{ij} – predstavlja dvaput kontravarijantni tenzor i naziva se <u>konjugovani metrički tenzor</u>.

Pozabavimo se determinantom g

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\, g_{kl}$$

prema pravilu za množenje determinante

$$\bar{g} \equiv |\bar{g}_{ij}| = \underbrace{\left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right|}_{J} \underbrace{\left|\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\right|}_{J} |g_{kl}| = \underbrace{\left|\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right|^2}_{J^2} g$$

=> g je relativni skalar težine 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1(-2) + 2\cdot 5 = 8$$

$$= -3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -3(-2) - 1(-14) - 4\cdot 5 = 6 + 14 - 20 = 0.$$

Skalarni proizvod

U metričkom prostoru pored metrike, za dva kontravarijantna vektora A^i i B^i može se uvesti skalarni proizvod prema:

$$(A,B) = g_{ij} A^i B^j$$

U novom koord. sistemu:

$$\bar g_{ij}\bar A^i \bar B^j = \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^j} g_{kl} \frac{\partial \bar x^i}{\partial x^m} A^m \frac{\partial \bar x^j}{\partial x^n} B^n = \frac{\partial x^k}{\partial x^m}\frac{\partial x^l}{\partial x^n} g_{kl} A^m B^n$$

$$= \delta^k_m \delta^l_n g_{kl} A^m B^n = g_{kl} A^k B^l$$

=> skalarni proizvod ostaje konstantan pri transformaciji koordinate

U slučaju Euklidskog prostora

$$(A,B) = \delta_{ij} A^i B^j = A^1B^1 + A^2B^2 + \dots + A^nB^n$$

Pojam dužine i ugla:

Ako je zadan kontravarijantni vektor A^i po analogiji sa E_3 intenzitet vektora A

$$A = +\sqrt{(A,A)} = +\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\,.$$

Ugao između dva vektora A^i, B^j definiše se relacijom:

$$\cos\alpha = \frac{(A,B)}{A\;B} = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\sqrt{g_{ij}B^iB^j}}$$

Ako je $\cos\alpha = 0$ kažemo da su vektori ortogonalni.

Element zapremine

$$d\bar x^1 d\bar x^2 \dots d\bar x^n = \underbrace{\left|\frac{\partial \bar x^i}{\partial x^k}\right|}_{\frac{1}{J} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\bar g}}} dx^1dx^2\dots dx^n = J\, dx^1 dx^2 \dots dx^n$$

Znamo: $\sqrt{\bar g} = J\sqrt{g}$

=> $\sqrt{g}\, d\bar x^1 d\bar x^2\dots d\bar x^n = \sqrt{g}\, dx^1 dx^2 \dots dx^n$

odnosno $dV = \sqrt{g}\, dx^1dx^2\dots dx^n$

Podizanje i spuštanje indeksa. Asocirani (združeni) tenzori

U afinom prostoru se ne može uspostaviti veza između npr. kontravarijantnih i kovarijantnih vektora (ili generalno za tenzore različitih tipova). Međutim u metričkom prostoru jedni vektori se mogu svoditi na druge pomoću tenzora g_{ij} i g^{ij}. Ili uopšteno pomoću ovih tenzora može se vršiti podizanje i spuštanje indeksa. Ako npr g_{ij} pomnožimo sa u^i (u pitanju je unutrašnji proizvod) onda:

$$g_{ij} u^j = u_i$$

Lako se dokazuje da je u_i kovarijantni vektor:

$$\bar{u}_i = \bar{g}_{ij} \bar{u}^j = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} g_{rs} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^t}}_{\delta^s_t} u^t = g_{rs} \underbrace{u^t \delta^s_t}_{u^s} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} = g_{rs} u^s \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} = u_r \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}$$

Analogno:
$$g^{ij} v_j = v^i$$

Generalno: Unutrašnji proizvod metričkog tenzora g_{ij} ili g^{ij} i nekog drugog tenzora predstavlja neki novi tenzor sa istim brojem indeksa, ali drugim rasporedom (isti red ali različit tip). Tako formirani tenzori nazivaju se asocirani (združeni) tenzori.

Onda npr. za kvadrat intenziteta kontravar. vektora u^i možemo reći da je unutrašnji proizvod datog vektora i njemu združenog tj.

$$u^j u_j = u^j g_{ij} u^i = g_{ij} u^j u^i = u_i u^i = (u)^2$$

– Rekli smo da je skal. proizv. invarijantan pri transformaciji, ali sad se može pokazati da je

$$u^i v_i = u_k v^k$$

jer je $u^i v_i = g^{ij} u_j v_i = g^{ij} g_{ik} u_j v^k = \delta^j_k u_j v^k = u_k v^k$

Može se izvršiti generalizacija: $g_{ij} g_{ke} A^{je} = A_{ik}$ i td.

U slučaju Euklidskog prostora imamo:

$$A_i = \delta_{ij} A^j \qquad tj. \qquad \boxed{A_i = A^i}$$

ili za tenzore višeg reda:

$$A_{ik} = \delta_{ij} \delta_{k\ell} A^{j\ell} = \delta_{ij} A^{jk} = A^{ik}$$

ili $A^{ijk} = A_k^{\ ij} = A_{jk}^{\ \ i} = A_{ijk}$ Napomenimo da ovo važi samo za metriku: $ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$

Tako u Descartes-ovom koord. sistemu nema razlike između kontravarijantnih i kovarijantnih komponenata, ali u sfernim koordinatama ove komponente nisu više jednake.

<u>Fizičke komponente</u> vektora A^p ili A_p su projekcije vektora na tangente koordinatnih linija i određuju se prema relaciji:

$$A_{(r)} = \sqrt{g_{rr}}\, A^r = \frac{A_r}{\sqrt{g_{rr}}}$$

sumiranje po (r) se ne podrazumeva

Pr.

$$A_{(1)} = \sqrt{g_{11}}\, A^1 = \frac{A_1}{\sqrt{g_{11}}} \ ; \quad A_{(2)} = \sqrt{g_{22}}\, A^2 = \frac{A_2}{\sqrt{g_{22}}}, \dots$$

Slično fizičke komponente mogu da se definišu za tenzore

$$A_{(11)} = g_{11} A^{11} = \frac{A_{11}}{g_{11}} \ ; \quad A_{(12)} = \sqrt{g_{11} g_{22}}\, A^{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \dots$$

Bitna karakteristika fizičkih komponenti je to što se njihove dimenzije uvek podudaraju sa dimenzijama intenziteta posmatranog vektora. Zbog toga se zovu fizičke. jer neće x^i ne moraju imati dimenzije dužine a g_{ij} ne mora biti bezdimenzionalno.

$$\underline{A_i = g_{ij} A^j}$$

Cristoffel-ovi simboli

Pođimo od relacije

$$\bar g_{jk} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar x^k} g_{mn}$$

diferencirajmo po $\bar x^i$

$$\frac{\partial \bar g_{jk}}{\partial \bar x^i} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar x^k} g_{mn} + \frac{\partial x^m}{\partial \bar x^j}\frac{\partial^2 x^n}{\partial\bar x^k\partial\bar x^i} g_{mn} + \frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^i}$$

Izvršimo cikličnu permutaciju indeksa $\underbrace{i,j,k}$ i $\underbrace{l,m,n}$

$$\frac{\partial \bar g_{ki}}{\partial\bar x^j} = \frac{\partial^2 x^n}{\partial\bar x^j\partial\bar x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i} g_{nl} + \frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}\frac{\partial^2 x^l}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j} g_{nl} + \frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}$$

i

$$\frac{\partial\bar g_{ij}}{\partial\bar x^k} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial\bar x^i\partial\bar x^k}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j} g_{lm} + \frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial^2 x^m}{\partial\bar x^j\partial\bar x^k} g_{lm} + \frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}$$

Poslednju j-nu oduzmimo od zbira prve dve:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \bar g_{jk}}{\partial\bar x^i} + \frac{\partial \bar g_{ki}}{\partial\bar x^j} - \frac{\partial \bar g_{ij}}{\partial\bar x^k} &= \frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k}\left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^n}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 x^m}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k} g_{mn} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 x^n}{\partial\bar x^k\partial\bar x^i}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j} g_{mn}}}_{\substack{n\to m\\ m\to n}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 x^n}{\partial\bar x^j\partial\bar x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i} g_{nl}}}_{\substack{n\to m\\ l\to n}} + \underbrace{\frac{\partial^2 x^l}{\partial\bar x^i\partial\bar x^j}\frac{\partial x^n}{\partial\bar x^k} g_{nl}}_{l\to m} \\ &- \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 x^l}{\partial\bar x^i\partial\bar x^k}\frac{\partial x^m}{\partial\bar x^j} g_{lm}}}_{\substack{l\to m\\ m\to n}} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 x^m}{\partial\bar x^j\partial\bar x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar x^i} g_{lm}}}_{l\to n} \end{aligned}\right.$$

$g_{nm} = g_{mn}$

Uvedimo veličinu

$$\Gamma_{ij,k} \equiv [ij,k] = \quad = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar g_{jk}}{\partial\bar x^i} + \frac{\partial \bar g_{ki}}{\partial\bar x^j} - \frac{\partial \bar g_{ij}}{\partial\bar x^k}\right)$$

koja se naziva Cristoffel-ov simbol I vrste

Odmah se vidi da je on simetričan u odnosu na prva dva indeksa tj. $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$

Toda j-na (1) postoje:

$$\bar{\Gamma}_{ij,k} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\Gamma_{lm,n} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} g_{mn}$$

što nam govori da Cr. simboli I vrste u opštem slučaju nisu tenzori.

Proizvod veličine $\Gamma_{ij,k}$ sa konjugovanim metr. tenzorom g^{lk} daje

$$g^{lk}\Gamma_{ij,k} \equiv \Gamma_{ij}^{l} = \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}$$ Cristoffel-ovi simboli II vrste

I Γ_{ij}^{l} nisu tenzori. Cristoffel-ovi simboli zavise od metrike prostora. U slučaju Euklidskog prostora i Descartes ovih koordinata sve komponente g_{ij} su konstante, te su izvodi jednaki nuli pa su i Cr. simboli $=0$.

Zaključak u Euklidskom prostoru postoji bar jedan sistem koordinata u kome su svi Cristofell-ovi simboli prve i druge vrste jednaki nuli. Po tome se E prostor bitno razlikuje od neeuklidskih Riemann-ovih prostora.

Primer: cilindrične koordinate (Cristoffel-ovi su I i II vrste)

8/25a

Znamo: $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$

$x^1 = \rho$; $x^2 = \varphi$; $x^3 = z$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$g_{11} = 1$; $g_{22} = (x^1)^2$; $g_{33} = 1$

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \qquad \Gamma^l_{ij} = g^{lk}\Gamma_{ij,k}$$

$$\Gamma_{11,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) = 0$$

$$\Gamma_{12,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x} - \right. = 0$$

$$\rightarrow \quad \Gamma_{22,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}}_{2x^1}\right) = \underline{\underline{-x^1}}$$

$$\rightarrow \quad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = x^1$$

$$\Gamma^1_{22} = g^{1k}\Gamma_{22,k} = g^{11}\Gamma_{22,1} + g^{12}\Gamma_{22,2} + g^{13}\Gamma_{22,3}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = g^{2k}\Gamma_{12,k} = \underbrace{g^{21}\Gamma_{12,1}}_{0} + g^{22}\Gamma_{12,2} + \underbrace{g^{23}\Gamma_{12,3}}_{0} = (x^1)^2 x^1$$

Prvo se nađe g^{ij} od g_{ij}

$$g^{ij} = \frac{G(i,j)}{g} \qquad g = \rho^2$$

$$g^{11} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1 \; ; \quad g^{22} = \frac{1}{\rho^2} \; ; \quad g^{33} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$